

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2κ\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2κ\pi + (\pi - \theta), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2κ\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2κ\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Μέθοδος

Για να λύσουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση, πρέπει πρώτα να τη φέρουμε σε μία από τις βασικές μορφές.

2.

Το πεδίο ορισμού της $\epsilon\phi x$

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } \sigma\upsilon\nu x \neq 0 &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad x \neq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

3.

Το πεδίο ορισμού της $\sigma\phi x$

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } \eta\mu x \neq 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \\ &x \neq 2\kappa\pi + 0 \quad \text{και} \quad x \neq 2\kappa\pi + \pi - 0, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x \neq \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

4.

Άγνωστος η εφx, σφx

Αν σε εξίσωση έχουμε εφαπτόμενες ή συνεφαπτόμενες του αγνώστου, θέτουμε περιορισμούς. (τα πεδία ορισμού) .

5.

Η εξαφάνιση του (-) μπροστά από τριγων/κό αριθμό

$$- \sin x = \sin(\pi - x)$$

$$- \eta\mu x = \eta\mu(-x)$$

$$- \epsilon\phi x = \epsilon\phi(-x)$$

$$- \sigma\phi x = \sigma\phi(-x)$$

6.

Η εναλλαγή ημ ↔ συν και εφ ↔ σφ

$$\eta\mu x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ή} \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ή} \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\epsilon\phi x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x}$$

$$\sigma\phi x = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{ή} \quad \sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x}$$

7.

Λύση εξίσωσης σε διάστημα

Βρίσκουμε τις λύσεις κανονικά και τις υποχρεώνουμε να ανήκουν στο διάστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \sin x = -\frac{1}{2}, \quad \text{ii)} \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{iii)} \varepsilon\varphi x = -1, \quad \text{iv)} \sigma\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} \sin x = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin x &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin x &= \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Σχόλιο 5

ii)

$$\begin{aligned} \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{4} \\ \eta\mu x &= \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ x &= 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

iii)

Περιορισμοί : Πρέπει $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi x = -1 &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \\ \varepsilon\varphi x &= \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Σχόλιο 4

iv)

Περιορισμοί : Πρέπει $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \sigma\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi \frac{\pi}{3} \\ \sigma\varphi x &= \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Σχόλιο 4

2.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu(2x + 45^\circ) = -1, \quad \text{iii)} \quad \epsilon\varphi\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

Σχόλιο 1

$$3x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 3x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad 3x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{2\pi}{6}$$

$$x = \frac{2\kappa\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 3x = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{2\kappa\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii)

$$\sigma\upsilon\nu(2x + 45^\circ) = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2x + 45^\circ) = \sigma\upsilon\nu 180^\circ$$

$$2x + 45^\circ = 360^\circ\kappa + 180^\circ \quad \text{ή} \quad 2x + 45^\circ = 360^\circ\kappa - 180^\circ$$

$$2x = 360^\circ\kappa + 135^\circ \quad \text{ή} \quad 2x = 360^\circ\kappa - 225^\circ$$

$$x = 180^\circ\kappa + 67,5^\circ \quad \text{ή} \quad x = 180^\circ\kappa - 112,5^\circ, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii)

$$\text{Περιορισμοί: } 4x + \frac{\pi}{3} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

Σχόλιο 4

$$x \neq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{24}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\varphi\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi \frac{\pi}{4}$$

$$4x + \frac{\pi}{3} = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$4x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} - \frac{\pi}{48}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \eta\mu(x + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(2x - 60^\circ) ,$$

$$\text{ii)} \quad \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 6

i)

$$\eta\mu(x + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(2x - 60^\circ) \Leftrightarrow \eta\mu(x + 30^\circ) = \eta\mu[90^\circ - (2x - 60^\circ)]$$

$$\eta\mu(x + 30^\circ) = \eta\mu(150^\circ - 2x)$$

$$x + 30^\circ = 360^\circ\kappa + 150^\circ - 2x \quad \text{ή} \quad x + 30^\circ = 360^\circ\kappa + 180^\circ - 150^\circ + 2x$$

$$3x = 360^\circ\kappa + 120^\circ \quad \text{ή} \quad -x = 360^\circ\kappa$$

$$x = 120^\circ\kappa + 40^\circ \quad \text{ή} \quad x = -360^\circ\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii)

$$\text{Περιορισμοί:} \quad x + \frac{\pi}{3} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad 3x - \frac{\pi}{6} \neq \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad 3x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{και} \quad x \neq \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Σχόλιο 4

$$\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2} - \left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 3x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - 3x, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

4.

Να λυθεί η εξίσωση $\sin 3x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

Προτεινόμενη λύση

$$\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{3}$$

Σχόλιο 7

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

• Για $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad (1)$

$$x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow -\pi \leq x \leq \pi \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \leq \pi$$

$$-\pi - \frac{\pi}{9} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \pi - \frac{\pi}{9}$$

$$-\frac{10\pi}{9} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{8\pi}{9}$$

$$-\frac{30\pi}{18\pi} \leq k \leq \frac{24\pi}{18\pi}$$

$$-\frac{5}{3} \leq k \leq \frac{4}{3}$$

και επειδή το k ακέραιος, θα είναι $k = -1$ ή $k = 0$ ή $k = 1$

Για $k = -1$, από την (1) έχουμε $x = \frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = -\frac{5\pi}{9}$

Για $k = 0$ από την (1) έχουμε $x = \frac{\pi}{9}$

Για $k = 1$ από την (1) έχουμε $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$

• Για $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}$

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και

βρίσκουμε $x = -\frac{7\pi}{9}$ ή $x = -\frac{\pi}{9}$ ή $x = \frac{5\pi}{9}$

5.

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad \eta\mu x = \frac{3 \pm 1}{2} = 1 \quad \text{ή} \quad 2 \quad \text{απορρίπτεται}$$

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

6.

Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\eta\mu x - 3 = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\eta\mu x - 3 = 0 &\Leftrightarrow 1 - \eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 3 = 0 \\ &- \eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 2 = 0 \\ \eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Συνέχισε όπως στην άσκηση 6

7.

Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2(x + 30^\circ) = 1$

Προτεινόμενη λύση

$$\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2(x + 30^\circ) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2(x + 30^\circ) = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2(x + 30^\circ) = 0$$

$$[\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ)][\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ) = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ) = 0$$

$$\bullet \quad \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(150^\circ - x)$$

$$x = 360^\circ \kappa + 150^\circ - x \quad \text{ή} \quad x = 360^\circ \kappa - 150^\circ + x$$

$$2x = 360^\circ \kappa + 150^\circ \quad \text{ή} \quad 0x = 360^\circ \kappa - 150^\circ$$

$$x = 180^\circ \kappa + 75^\circ, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \quad \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x + 30^\circ)$$

$$x = 360^\circ \lambda + x + 30^\circ \quad \text{ή} \quad x = 360^\circ \lambda - x - 30^\circ$$

$$0x = 360^\circ \lambda + 30^\circ \quad \text{ή} \quad 2x = 360^\circ \lambda - 30^\circ$$

$$x = 180^\circ \lambda - 15^\circ, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

8.

Να λυθεί η εξίσωση

$$4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\sin x + \sqrt{3} = 0$$

Λύση

$$\Delta = 4(\sqrt{3}+1)^2 - 16\sqrt{3} = 4[(\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3}]$$

$$= 4(\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3})$$

$$= 4(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1) = [2(\sqrt{3}-1)]^2$$

$$\sin x = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm 2(\sqrt{3}-1)}{8} = \frac{2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-2}{8} \quad \text{ή} \quad \frac{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}$$

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$

9.Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi^3 x - \varepsilon\varphi^2 x - 3\varepsilon\varphi x + 3 = 0$ **Προτεινόμενη λύση**Περιορισμός : Πρέπει $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Σχόλιο 4

Θέτουμε $\varepsilon\varphi x = y$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$y^3 - y^2 - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2(y-1) - 3(y-1) = 0$$

$$(y-1)(y^2 - 3) = 0$$

$$y-1 = 0 \quad \text{ή} \quad y^2 - 3 = 0$$

$$y-1 = 0 \quad \text{ή} \quad y^2 = 3$$

$$y=1 \quad \text{ή} \quad y = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{3}$$

- Για $y=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
- Για $y=\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$
- Για $y=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \mu\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \mu \in \mathbb{Z}$$

10.

Να λυθεί η εξίσωση $2\sin x = \sqrt{3}\cos x$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός: Πρέπει $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$2\sin x = \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow 2\sin x = \sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x}$$

Σχόλιο 4

$$2\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin x$$

$$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\sin x (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{ή} \quad 2\cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{ή} \quad 2\cos x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = 0 \quad \text{ή} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Όταν $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

- Όταν $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.

Να λυθεί η εξίσωση $\sin x = \frac{2\epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : Πρέπει $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Σχόλιο 4

$$\sin x = \frac{2\epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi^2 x} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\frac{2\eta\mu x}{\sin x}}{1 + \frac{\eta\mu^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$\sin x = \frac{\frac{2\eta\mu x}{\sin x}}{\frac{\eta\mu^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$\sin x = \frac{2\eta\mu x \sin^2 x}{\sin x}$$

$$\sin x = 2\eta\mu x \sin x$$

$$\sin x - 2\eta\mu x \sin x = 0$$

$$\sin x (1 - 2\eta\mu x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{ή} \quad 1 - 2\eta\mu x = 0$$

- Όταν $\sin x = 0$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού

- Όταν $1 - 2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

12.

Οι ετήσιες πωλήσεις (σε χιλιάδες κομμάτια) ενός προϊόντος δίνονται από την συνάρτηση $f(t) = 15 + 2\eta\mu\frac{\pi \cdot t}{3}$, όπου t ο χρόνος σε έτη με $0 \leq t \leq 6$

i) Να βρεθεί ποιο έτος από σήμερα ($t = 0$) έχουμε τον μέγιστο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές

ii) Ποιο έτος οι πωλήσεις θα είναι 16000 κομμάτια.

Προτεινόμενη λύση

i)

Ο μέγιστος αριθμός των πωλήσεων θα ισούται με το μέγιστο της συνάρτησης $f(t)$, το οποίο είναι $15 + 2 = 17$, αφού είναι της μορφής $f(t) = 15 + \rho\eta\mu\omega t$

Οπότε ο μέγιστος αριθμός των πωλήσεων είναι 17000 κομμάτια

Για να βρούμε το έτος που έχουμε τις περισσότερες πωλήσεις λύνουμε την εξίσωση

$$f(t) = 17 \Leftrightarrow 15 + 2\eta\mu\frac{\pi \cdot t}{3} = 17$$

$$\eta\mu\frac{\pi \cdot t}{3} = 1$$

$$\eta\mu\frac{\pi \cdot t}{3} = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi \cdot t}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\pi \cdot t = 6k\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t = 6k + \frac{3}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6k + \frac{3}{2} \leq 6$$

$$-\frac{3}{2} \leq 6k \leq \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

Και επειδή k ακέραιος θα είναι $k = 0$

$$\text{Οπότε η (1)} \Rightarrow t = \frac{3}{2} = 1,5$$

Δηλαδή ο μέγιστος αριθμός των πωλήσεων θα πραγματοποιηθεί σε ενάμιση χρόνο από σήμερα

ii)

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(t) = 16 \Leftrightarrow$

$$15 + 2\eta\mu\frac{\pi \cdot t}{3} = 16$$

$$\eta\mu\frac{\pi \cdot t}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu \frac{\pi \cdot t}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\eta\mu \frac{\pi \cdot t}{3} = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi \cdot t}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi \cdot t}{3} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\pi \cdot t = 6\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \pi \cdot t = 6\kappa\pi + \frac{5\pi}{2}$$

$$t = 6\kappa + \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad t = 6\kappa + \frac{5}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Όμως } 0 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6\kappa + \frac{1}{2} \leq 6 \quad \text{ή} \quad 0 \leq 6\kappa + \frac{5}{2} \leq 6$$

$$-\frac{1}{2} \leq 6\kappa \leq \frac{11}{2} \quad \text{ή} \quad -\frac{5}{2} \leq 6\kappa \leq \frac{7}{2}$$

$$-\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \quad \text{ή} \quad -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \text{ οπότε}$$

$$\kappa = 0 \quad \text{και επομένως } t = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad t = \frac{5}{2}$$

Άρα 16 χιλιάδες κομμάτια θα πουλήσει η επιχείρηση σε 6 μήνες ή σε 2,5 χρόνια από σήμερα